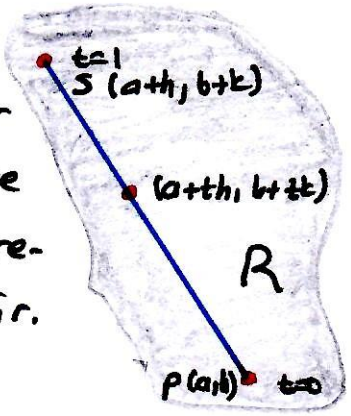
İki Değişkenli Taylor Formülü

Yerel ekstremum için ikinci türev testi ve iki değişkenli fonksiyonların doğrusallaştırılmasındaki hata formülünü elde etmek için Taylor formülünü kullanırız.

İkinci Türev Testinin Elde Edilmesi

$f_x = f_y = 0$ olduğu bir $P(a,b)$ noktasını içeren R açık bölgesinde $f(x,y)$, sürekli kısmi türevlere sahip olsun. P ve $S(a+h, b+k)$ noktalarını birleştiren doğru parçası R bölgesinde kalacak şekilde h ve k yeterince küçük artımlar olsun. PS doğru parçasının parametrelenmesi $x = a+th$, $y = b+tk$, $0 \le t \le 1$ dir.



$F(t) = f(a+th, b+tk)$ ise zincir kuralından

$$F'(t) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = hf_x + kf_y.$$

f_x ve f_y dif. olduğu için (sürekli kısmi türevlere sahip), F', t'nin dif. bir fonksiyonudur ve

$$F'' = \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(hf_x + kf_y).h + \frac{\partial}{\partial y}(hf_x + kf_y).k$$
$$= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}$$

F' ve F'', $[0,1]$'de sürekli ve F', $(0,1)$'de dif. olduğundan $a=0$, $n=2$ için Taylor formülünü uygularsak

$$F(1) = F(0) + F'(0)(1-0) + F''(c)\frac{(1-0)^2}{2} = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(c) \quad 0<c<1$$

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 h_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,\, b+ck)}$$

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ olduğundan

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 h_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,\, b+ck)}.$$

$f(a+h, b+k) - f(a,b)$'nin işareti f'nin ekstremumunu belirler ve bu $Q(c) = \left(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 h_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,\, b+ck)}$'nin işaretiyle aynıdır. Eğer $Q(0) \neq 0$ ise h ve k'nın çok küçük değerleri için $Q(c)$ ile $Q(0)$'ın işareti aynıdır. Şimdi $Q(0) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)$'ın işaretini inceleyelim. Her iki tarafı f_{xx} ile çarparsak, son denklem

$$f_{xx}\, Q(0) = (h f_{xx} + k f_{yy})^2 + (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)\, t^2$$

formuna gelir.

1. (a,b)'de $f_{xx} < 0$ ve $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise $Q(0) < 0$ ve f, (a,b)'de yerel maksimuma sahiptir.
2. (a,b)'de $f_{xx} > 0$ ve $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ise $Q(0) > 0$ ve f, (a,b)'de yerel minimuma sahiptir.
3. (a,b)'de $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ise h ve k'nın yeterince küçük değerlerine göre $Q(0) > 0$ ve $Q(0) < 0$ olduğundan f, (a,b)'de sayer noktasına sahiptir
4. $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ise başka bir teste ihtiyacımız var. $Q(0)$'ın sıfır olma olasılığı $Q(0)$'ın işareti hakkında karar vermemizi engeller.

İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Formülü

F' ve F'' türevlerini $f(x,y)$'ye

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{ve} \quad \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

operatörlerini uygulayarak tekrar elde edebiliriz. Daha genel formül

$$F^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} F(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$$

dir.

$n+1$ mertebesi boyunca f'nin kısmi türevleri sürekli ise

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \text{kalan}, \qquad t=1 \text{ alınırsa}$$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \text{kalan}.$$

(a,b) Noktasında $f(x,y)$ için Taylor Formülü

$f(x,y)$ ve $n+1$. mertebeden kısmi türevleri, (a,b) merkezli bir R açık dikdörtgensel bölgesinde sürekli olsun. Bu durumda,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + (hf_x + kf_y)\big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})\big|_{(a,b)}$$
$$+ \frac{1}{3}(h^3 f_{xxx} + 3h^2k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})\big|_{(a,b)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\big|_{(a+ch,\, b+ck)}.$$

Örnek: $f(x,y) = \sin x \sin y$ fonksiyonunun orjin civarında kuadratik yaklaşımını bulunuz.

$$f(x,y) = f(0,0) + (x f_x + y f_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy})$$
$$+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,cy)}$$

$f(0,0) = \sin x \sin y \,|_{(0,0)} = 0,$ $\qquad f_x(0,0) = \cos x \sin y \,|_{(0,0)} = 0$

$f_y(0,0) = \sin x \cos y \,|_{(0,0)} = 0,$ $\qquad f_{xx}(0,0) = -\sin x \sin y \,|_{(0,0)} = 0$

$f_{xy}(0,0) = \cos x \cos y \,|_{(0,0)} = 1,$ $\qquad f_{yy}(0,0) = -\sin x \sin y \,|_{(0,0)} = 0$

$$\sin x \sin y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2 \cdot 0 + 2xy \cdot 1 + y^2 \cdot 0) \Rightarrow$$

$$\sin x \sin y \approx xy$$